Министерство образования и науки Самарской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Самарской области
«САМАРСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»
(ГБПОУ «СЭК»)

Р.Р. Мазитова

МАТЕМАТИКА

Методические указания для практических занятий

для студентов специальности 13.02.03
Электрические станции, сети и системы

Самара 2016

Печатается по решению методического совета государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Самарской области «Самарский энергетический колледж»

Методические указания для практических занятий по дисциплине *Математика* для студентов специальности 13.02.03 /сост. Мазитова Р.Р. – Самара: ГБПОУ «СЭК», 2016 – 45 с.

Издание содержит методические указания к практическим занятиям по дисциплине *Математика.*

Замечания, предложения и пожелания направлять в ГБПОУ «СЭК» по адресу: 443001, г. Самара, ул. Самарская 205-А или по электронной почте info@sam-ek.ru

ГБПОУ «СЭК» 2016 г.

Уважаемый студент!

Методическое пособие создано в помощь Вам для подготовки к практическим занятиям. Наличие положительной оценки по практическим занятиям необходимо для допуска к экзамену по дисциплине *Математика*, поэтому в случае отсутствия на занятии или получения неудовлетворительной оценки за выполнение практической работы Вы должны найти время для её выполнения или пересдачи.

Правила подготовки к практическим занятиям

1. Для повышения эффективности выполнения практических работ и активного участия в них каждый студент должен заранее готовиться к очередной работе.
2. Подготовка складывается из освоения теоретического материала, относящегося к работе, изучения цели и содержания практического занятия.
3. Практические работы выполняются на занятиях всей группой одновременно.
4. В начале практического занятия преподаватель проверяет подготовленность каждого студента (путем опроса или другого вида контроля и ознакомления с записями в рабочей тетради).
5. По результатам практического занятия каждый студент, выполнивший заданный объём работы, получает оценку.
6. Студенты, проявившие старание при выполнении работ, показавшие при этом твердые теоретические знания и практические навыки, аккуратно, без ошибок выполнившие работы, имеют возможность получить дополнительные оценки.
7. Работы студентов, выполненные на практических занятиях, хранятся в кабинете преподавателя в течение учебного года.
8. Оценку по практическому занятию Вы получаете, с учетом срока выполнения работы, если:
   - задание выполнено правильно и в полном объёме;
   - сделан анализ проделанной работы и вывод по результатам работы;
   - Вы можете пояснить выполнение любого этапа работы;
   - задание выполнено в соответствии с требованиями.

Внимание! Если в процессе подготовки к практическим занятиям или при их выполнении у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удаётся, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений.

Перечень практических занятий

№ п/п	Название практической работы на практическом занятии
Практические занятия по теме 1.1 «Матрицы и определители»	
1	Практическая работа 1. Вычисление определителей высших порядков
Практические занятия по теме 1.2 «Системы линейных алгебраических уравнений»	
2	Практическая работа 2. Решение систем линейных уравнений различными методами
Практические занятия по теме 2.1 «Дифференциальное исчисление»	
3	Практическая работа 3. Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности
4	Практическая работа 4. Дифференцирование сложных функции
5	Практическая работа 5. Решение прикладных задач с помощью производной и дифференциалов
Практические занятия по теме 2.2 «Интегральное исчисление»	
6	Практическая работа 6. Интегрирование простейших функций
7	Практическая работа 7. Приближенное вычисление определенного интеграла по формуле прямоугольников и трапеций
8	Практическая работа 8. Решение прикладных задач с помощью интеграла
	Практические занятия по теме 2.3 «Дифференциальные уравнения»
9	Практическая работа 9. Решение дифференциальных уравнений
Практические занятия по теме 2.4 «Ряды»	
10	Практическая работа 10. Исследование рядов на сходимость
11	Практическая работа 11. Построение графиков простых и сложных гармонических колебаний
Практические занятия по теме 3.1 «Основы теории комплексных чисел»	
12	Практическая работа 12. Действия над комплексными числами в различных формах. Изображение комплексных чисел на координатной плоскости
13	Практическая работа 13. Применение комплексных чисел при решении задач по видам профессиональной деятельности
Практические занятия по теме 4.1 «Основы математической статистики»	
14	Практическая работа 14. Решение простейших задач математической статистики

Методические указания по подготовке к практическим занятиям

Цель практических занятий состоит в проверке знаний, полученных на теоретических занятиях, и умений, освоенных в процессе самостоятельной работы.

Подготовка к практическим работам заключатся в самостоятельном изучении теории по рекомендуемой литературе, предусмотренной рабочей программой.

Для эффективного выполнения заданий Вы должны знать теоретические материалы и уметь применять эти знания для приобретения практических навыков при выполнении практических заданий.

Оценки за выполнение практических занятий выставляется по пятибалльной системе.

Условия и порядок выполнения работы:

1. Прочитать методические рекомендации по выполнению практической работы.
2. Ответить на вопросы, необходимые для выполнения заданий.
3. Изучить содержание заданий и начать выполнение.
4. Работу выполнить в тетрадях для практических работ и аккуратно оформить.
5. Консультацию по выполнению работы получить у преподавателя.
6. Работа оценивается в целом, по итогам выполнения работы выставляется оценка.

Работа считается выполненной, если она соответствует указанным критериям.

Методические указания по выполнению практических занятий

Практические занятия проходят в форме решения задач. Порядок действий при выполнении практических занятий:

1. Внимательно прочитать задание;
2. Записать условия в тетрадь;
3. Проанализировать;
4. Решить задачу изученной темы, используя основные формулы;
5. Записать ответ;
6. Поднять руку, чтобы преподаватель подошел и проверил;
7. Если решение правильное, то можно приступить к следующему заданию, если решение не правильное, то послушать комментарии преподавателя и принять меры, для правильного решения.

Практические занятия по теме 1.1 «Матрицы и определители»

Практическая работа 1

Вычисление определителей высших порядков

Цель: научиться вычислять определители квадратных матриц 2, 3, 4 порядка.

Краткие теоретические сведения

Понятие определителей матриц

Определителем **n**-го порядка матрицы **A** называется число, равное алгебраической сумме n! слагаемых, каждое из которых равно произведению n элементов матрицы **A** $\mathbf{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}}$, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем каждое слагаемое берется со знаком «+» или «-«.

Пусть дана квадратная матрица **A** из четырех элементов. Тогда определителем второго порядка является некоторое число Δ, соответствующее этой таблице и вычисляемое по правилу: из произведения элементов, стоящих по главной диагонали вычитается произведение элементов, стоящих по вспомогательной диагонали.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}; \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Аналогично может быть составлен определитель произвольного (<u>**n**-го</u>) порядка, соответствующий квадратной матрице, содержащей <u>**n**</u> строк и <u>**n**</u> столбцов. Сформулируем алгоритм его вычисления на примере определителя третьего порядка (<u>**n**=3</u>).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для нумерации элементов определителя использованы двойные индексы, позволяющие однозначно определить местоположение элемента: первое число индекса – это номер строки, а второе – номер столбца, на перекрестье которых расположен соответствующий элемент. (Строки и столбцы нумеруются сверху - вниз и справа -налево соответственно).

Пусть дан определитель **n** порядка.

<u>Минором $\mathbf{M_{mn}}$ элемента $\mathbf{a_{mn}}$</u> определителя (**1 ≤ m ≤ N** – номер строки, а **1 ≤ n ≤ N** – номер столбца, на перекрестье которых элемент $\mathbf{a_{mn}}$ расположен) назовем определитель **n – 1** порядка, получаемый из исходного вычеркиванием **m** строки и **n** столбца.

Алгебраическое дополнение элемента <u>$\mathbf{a_{mn}}$</u> определим соотношением

$$A_{mn} = (-1)^{m+n} M_{mn}$$

Операция вычисления определителя с помощью вновь введенных величин называется раскрытием определителя по элементам его строки (столбца) и выполняется в соответствии со следующей теоремой: ***Определитель произвольного порядка равен сумме произведений элементов любой его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.*** Несложно убедиться, что правило вычисления определителя второго порядка есть частный случай предложенного способа.

Определитель третьего порядка, раскрываемый по элементам первой строки, примет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(Это соотношение известно как формула Саррюса.)

Полезно иметь в виду следующие свойства определителей:

1. Определитель не изменится, если строки заменить столбцами, а столбцы строками.
2. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
3. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.
4. Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.
5. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.
6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца), прибавить соответственные элементы другой строки (столбца) умноженные на одно и то же число.
7. Если все элементы какой-либо строки есть суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в одном из которых суммы заменены их первыми слагаемыми, а во втором – вторыми:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1' & b_1 + b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей? Приведите примеры.
2. Какие действия установлены над матрицами? Как они определяются и каковы их основные свойства?
3. Каковы основные свойства определителей?
4. Что называется минором и алгебраическим дополнением?
5. Каковы способы вычисления определителей?

Задание для выполнения практической работы

Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & -6 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad У = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 4 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\8&-7&6&-5\\-1&0&-2&9\\5&6&7&8\end{pmatrix} H=\begin{pmatrix}9&3&5&1\\3&-7&6&-5\\1&0&-2&0\\2&6&7&8\end{pmatrix} \mathrm{N}=\begin{pmatrix}1&3&5&1\\2&-4&6&5\\1&0&-2&3\\2&3&7&5\end{pmatrix} Z=\begin{pmatrix}0&-2&4&1\\2&-4&6&5\\1&1&2&3\\1&3&4&5\end{pmatrix}$$

Вариант 1

1. Вычислить определители матриц: А, С, М
2. Найти матрицы обратные: В, К

Вариант 2

1. Вычислить определители матриц: В, К, N
2. Найти матрицы обратные: А, С

Вариант 3

1. Вычислить определители матриц: 3А, Х, Н
2. Найти матрицы обратные: В, У

Вариант 4

1. Вычислить определители матриц: 2В, У, z
2. Найти матрицы обратные: А, Х

Практические занятия по теме 1.2 «Системы линейных алгебраических уравнений»

Практическая работа 2

Решение систем линейных алгебраических уравнений различными методами

Цель: научиться решать линейные уравнения различными методами.

Краткие теоретические сведения

Системы линейных уравнений

Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

называется *системой* m *линейных уравнений* с n неизвестными, где $x_1, x_2, ..., x_n$ - неизвестные, a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{mn}$ - коэффициенты при неизвестных, $в_1$, $в_2, \ldots, в_m$ – свободные члены.

Если свободные члены равны нулю, то система называется *однородной*, и неоднородной в противном случае.

Решением системы называется совокупность чисел $c_1, c_2, ... c_n$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества.

Система уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определённой*, если она имеет только одно решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения.

При изучении систем исследуются три вопроса:

1) Совместна система или нет,
2) Если система совместна, то является ли она определённой или неопределённой,
3) Нахождение единственного решения в случае определённой системы и всех решений в случае неопределенной.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Составим из коэффициентов при неизвестных и свободных членов три определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Легко видеть, что второй и третий определители получаются из первого заменой столбца соответствующих индексу коэффициентов столбцом свободных членов. Правило Крамера решения системы линейных уравнений заключается в использовании соотношений

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}\ ; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Отметим, что использовать их можно при $\Delta \neq \mathbf{0}$. Это тот случай, когда система *определена* и *совместна* (т.е. имеет *единственное решение*).

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля ($(\Delta_x)^2+(\Delta_y)^2 \neq 0$), то система *не совместна* (т.е. *не имеет решений*), а если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система *не определена* и имеет *бесконечное множество решений*.

Аналогично правило Крамера формулируется и для системы из трех (или n) линейных уравнений с тремя (или n) неизвестными.

$$\begin{cases} \mathrm{a}_{11}\mathrm{x} + \mathrm{a}_{12}\mathrm{y} + \mathrm{a}_{13}\mathrm{z} = \mathrm{d}_1 \\ \mathrm{a}_{21}\mathrm{x} + \mathrm{a}_{22}\mathrm{y} + \mathrm{a}_{23}\mathrm{z} = \mathrm{d}_2 \\ \mathrm{a}_{31}\mathrm{x} + \mathrm{a}_{32}\mathrm{y} + \mathrm{a}_{33}\mathrm{z} = \mathrm{d}_3 \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{matrix} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} \end{matrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

А $\mathbf{\Delta_x}$, $\mathbf{\Delta_y}$, $\mathbf{\Delta_z}$ получаются из Δ заменой столбца соответствующих коэффициентов столбцом свободных членов. Аналогично проводится и исследование системы (возможны те же три случая).

Решение систем линейных уравнений матричным способом

Определение операции умножения матриц позволяет предложить матричный способ решения системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Систему уравнений можно представить в матричной форме, как AX = B, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Если $\Delta \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, то решение системы запишется в виде $X = A^{-1}B$ т.е. для нахождения матрицы-столбца неизвестных надо умножить обратную матрицу системы на матрицу-столбец свободных членов.

Контрольные вопросы

1. Что представляют собой системы 2-х, 3-х, *n*-линейных уравнений переменных с *n* неизвестными?
2. Какой вид имеют формулы Крамера, и в каком случае они применяются?
3. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?

Задание для выполнения практической работы

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера.

Вариант 1 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Вариант 2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$

Вариант 3 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

Вариант 4 $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 14x_2 - 12x_3 = -16 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

Решить систему линейных уравнений с помощью матричного способа.

Вариант 1 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Вариант 2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$

Вариант 3 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

Вариант 4 $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 14x_2 - 12x_3 = -16 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

Практические занятия по теме 2.1 «Дифференциальное исчисление»

Практическая работа 3

Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности

Цель: научиться вычислять пределы многочленов, частного многочленов; раскрывать неопределенности; использовать замечательные пределы.

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим простую линейную функцию $f(x)=2x$ и зададимся вопросом, к какому числу *A* приближаются значения этой функции, когда значения переменной *x* приближаются к числу 3. Вычислим соответствующие значения *f(x)* и представим их в виде таблицы:

X	2,0	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999
f(x)	4,0	5,0	5,8	5,98	5,998	5,9998
X	4,0	3,5	3,1	3,01	3,001	3,0001
f(x)	8,0	7,0	6,2	6,02	6,002	6,0002

Из таблицы видно, что значения функции *f(x)* приближаются к числу 6, если значения *x* приближаются к числу 3 как «слева» (по числовой прямой) так и «справа». Символически это записывается так: $\lim\limits_{x\to 3}(2x)=6$ и читается: предел функции $y=2x$, когда *x* стремится к 3 ($x\to 3$), равен 6.

Теперь дадим общее определение предела функции в точке.

Пусть функция *y* = *f(x)* определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathrm{R}$ за исключением, быть может, самой точки x_0.

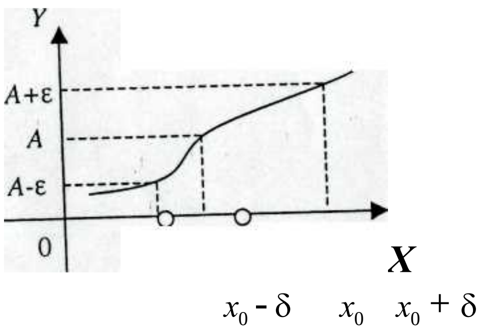
Определение 1: Число *A* называется пределом функции *y* = *f(x)* при $x\to x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что при всех *x,* удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$. Кратко это можно записать так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Выясним, что представляет собой геометрически понятие предела функции. Раскроем знаки модуля в неравенствах из определения предела функции:

$$|x-x_0|<\delta \quad , \qquad -\delta<x-x_0<\delta \quad , \quad x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

Аналогично *f(x)* $\in(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Геометрически это означает, что какую бы окрестность точки *A* на оси *OY* мы ни взяли, всегда найдётся окрестность точки x_0 на оси *OX,* которую функция переводит в окрестность оси *OY*.



Дадим также определение предела функции на бесконечности и одностороннего предела.

Определение 2: Функция *y=f(x)* имеет предел на бесконечности при $x \to \pm\infty$, если для любого *M>0* существует $\delta \rangle 0$ такое, что при всех *x,* удовлетворяющих неравенству $0 \langle |x - x_0| \langle \delta$, будет выполняться неравенство *f(x)>M (f(x)<-M).*

Кратко это можно записать так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

Определение 3: Число *A* называется пределом функции *y=f(x)* при $x \to x_0$ слева, или левосторонним пределом, если для любого $\varepsilon \rangle 0$ найдётся $\delta \rangle 0$ такое, что при всех *x,* удовлетворяющих неравенству $x_0 - x \langle \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - \mathrm{A}| \langle \varepsilon$. Кратко это можно записать так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$

Определение 4: Число *A* называется пределом функции *y=f(x)* при $x \to x_0$ справа, или правосторонним пределом, если для любого $\varepsilon \rangle 0$ найдётся $\delta \rangle 0$ такое, что при всех *x,* удовлетворяющих неравенству $x - x_0 \langle \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - \mathrm{A}| \langle \varepsilon$. Кратко это можно записать так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$

Функция имеет предел в некоторой точке, равный некоторому значению, тогда и только тогда, когда существуют и равны этому же значению оба односторонних предела:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$$

Рассмотрим функцию $f(x) = C$, её предел для любого x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$

Рассмотрим функцию $f(x) = x$, её предел для любого x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$

Пример: найти предел функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$

$\lim\limits_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$, т.к. $x \to 0 - 0$, то $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $2^{\frac{1}{x}} \to 0$

$\lim\limits_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$, т.к. $x \to 0 + 0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $2^{\frac{1}{x}} \to +\infty$

Таким образом, предел функции при *x*, стремящемся к нулю, не существует.

Теоремы о пределах

Теорема о существовании предела: Функция не может иметь двух различных пределов в одной точке.

Теорема 1. Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$

Теорема 2. Если каждое слагаемое алгебраической суммы функций имеет предел при $x \to x_0$, то и алгебраическая сумма имеет предел при $x \to x_0$, причём предел алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Теорема 3. Если каждый из сомножителей произведения конечного числа функций имеет предел при $x \to x_0$, то и произведение имеет предел при $x \to x_0$, причём предел произведения равен произведению пределов: $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0}\left(C \cdot f(x) \right) = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Следствие 2. Предел степени равен степени предела: $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)^n \right) = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))^n$

Теорема 4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to x_0$, причём $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, то и их частное имеет предел при $x \to x_0$, причем предел частного равен частному пределов: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

Вычисление пределов

Предел многочлена в точке

В простых случаях пределы вычисляются с помощью теорем о пределах.

Пример:

$$\lim_{x \to 2} \left(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7\right) = \lim_{x \to 2} \left(5x^3\right) + \lim_{x \to 2} \left(2x^2\right) - \lim_{x \to 2} (3x) + \lim_{x \to 2} 7 =$$

$$= 5 \lim_{x \to 2} x^3 + 2 \lim_{x \to 2} x^2 - 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 7 = 5\left(\lim_{x \to 2} x \right)^3 + 2\left(\lim_{x \to 2} x \right)^2 - 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 7 =$$

$$= 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 49$$

При вычислении предела многочлена *f(x)* при $x \to x_0$ достаточно вместо переменной x подставить значение x_0, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Предел частного в точке

При вычислении предела частного $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, необходимо проверить обращается ли в ноль предел делителя ($\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$). Затем рассчитать предел числителя: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{0} = \infty$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, то имеет место неопределенность $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для раскрытия неопределенности необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, преобразовать дробь и воспользоваться теоремой предела частного. Для этого воспользуемся формулами сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$
$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

Разложить на множители квадратный многочлен типа a^2+bx+c, можно найдя его корни, используя формулу дискриминанта $D=b^2-4ac$.

Тогда $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, а $a^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$.

Если нельзя разложить на множители числитель и знаменатель, используется метод замены переменной. Заменим x на $y=x-x_0$, при этом $x=y+x_0$, а $y\to 0$.

Далее используем теорему предела частного: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{y\to 0}f(y)}{\lim\limits_{y\to 0}g(y)}$.

Пример: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$

Предел частного на бесконечности

Для вычисления предела частного $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to\infty$, необходимо числитель и знаменатель разделить на x в максимальной степени и воспользоваться правилом $\dfrac{A}{\infty}=0$, чтобы раскрыть неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$

Предел иррациональных выражений

При вычислении пределов, содержащих иррациональные функции $y=\sqrt{f(x)}$, необходимо умножить и числитель, и знаменатель на множитель, сопряженный с иррациональным. Далее воспользоваться правилом:

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_0)}.$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=2\frac{1}{1+1}=1$$

Замечательные пределы

Для нахождения пределов тригонометрических функций ($\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$) используется первый замечательный предел и следствие из этого предела.

Первый замечательный предел: Предел отношения синуса малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, при стремлении величины дуги к нулю равен единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=1$$

<u>*Следствие 1-го замечательного предела*</u>: $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

Для нахождения числа *e* и раскрытия неопределенности 1^{∞} используется 2-ой замечательный предел.

Второй замечательный предел: Предел последовательности $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ при $x\to\infty$

равен $e=2{,}71$: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2}{3}x}\right)^{5x}=\Bigg(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2}{3}x}\right)^{\frac{2}{3}x}\Bigg)^{5\cdot\frac{3}{2}}=e^{\frac{15}{2}}$

В решении задач теории пределов могут быть полезны следующие равенства: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{m}-1}{x}=m$.

Можно также заменять бесконечно малые величины эквивалентными им:

$\sin x\sim x$, $tgx\sim x$, $\arcsin x\sim x$, $artgx\sim x$, $\log_a(1+x)\sim x\log_a e$; $\ln(x+1)\sim x$,

$a^{x-1}\sim x\ln a$; $e^{x}-1\sim x$; $(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x$; $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}$; $1-\cos x\sim\dfrac{x^{2}}{2}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется пределом функции в точке и на бесконечности?
2. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
3. Как вычислить предел многочленов, частного многочленов в точке?
4. Как вычислить предел, содержащий иррациональное выражение?
5. Как раскрываются неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right],\left[\dfrac{0}{0}\right],\left[1^{\infty}\right]$.
6. Запишите 1и 2 замечательные пределы, в каком случае они используются?

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1**.** Вычислите пределы функций:

1. $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$ 2. $\lim_{x\to 2}\frac{2x-x^2}{x^2-5x+6}$ 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-8}$ 4. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$

Вариант 2. Вычислите пределы функций:

1. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$ 2. $\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2-1}$ 4. $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

Вариант 3. Вычислите пределы функций:

1. $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}$ 2. $\lim_{x\to3}\frac{4x^2-11x-3}{3x^2-8x-3}$ 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2x+x^3}{10x^3+x^{2-80}}$ 4. $\lim_{x\to6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$

5. $\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$

Вариант 4. Вычислите пределы функций:

1. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{2(x^2-1)}$ 2. $\lim_{x\to5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$ 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+6}{-3x^3+x^2-26}$ 4. $\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$

5. $\lim_{\square\to0}(1+4\square)^{\frac{3}{5\square}}$

Вариант 5. Вычислите пределы функций:

1. $\lim_{x\to-4}\frac{x^3+64}{x+4}$ 2. $\lim_{x\to2}\frac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$ 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+6}{-3x^3+x^2-26}$ 4. $\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$

5. $\lim_{\square\to0}(1+4\square)^{\frac{3}{5\square}}$

Вариант 6. Вычислите пределы функций:

1. $\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{2(x^2-1)}$ 2. $\lim_{x\to5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$ 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+11}{x^2-1+3x^3}$ 4. $\lim_{x\to5}\frac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$

5. $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$

Практическая работа 4

Дифференцирование сложных функций

Цель: научиться находить производные функций, в том числе сложных, используя правила дифференцирования.

Краткие теоретические сведения

Пусть функция *y=f(x),* дифференцируемая в некоторой точке интервала *(а, в).*

Если приращение функции можно представить в виде $\Delta y=\kappa\Delta x+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ − б.м. функция более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x\to0$ $(\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\alpha\Delta x)}{\Delta x}=0)$, тогда $dy=\kappa\Delta x$.

Определение: Дифференциалом функции *f(x)* в точке x_0 называется линейная относительно Δx величина $f'(x_0)\cdot\Delta x$, составляющая главную часть приращения функции *f(x)* в точке x_0 и обозначается *dy=* $y'\cdot\Delta x$

Теорема 1. Функция не может иметь двух различных дифференциалов.

Теорема 2. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке она имеет дифференциал.

Теорема 3. Если функция имеет дифференциал в некоторой точке, то она имеет производную в этой точке.

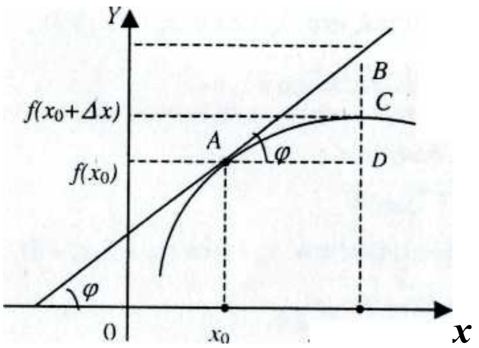
Дифференциал независимой переменной

Рассмотрим функцию *y=x, dy=dx*. Из теорем о связи производной и дифференциала следует, что: $dy=1\,\Delta x$, $dx=dy=\Delta x$.

Дифференциал независимой переменной равен малому приращению этой переменной. Таким образом, получена формула для вычисления дифференциала функции: $dy = f'(x_o)dx$.

Дифференциал функции равен произведению производной функции в данной точке на дифференциал независимой переменной: $dy= f'(x)\,dx$.

Геометрический смысл дифференциала: Дана дифференцируемая функция *y=f(x).* Возьмем произвольную точку x_0 и проведем в этой точке касательную к графику. Дадим аргументу приращение Δx. Дифференциал функции в точке равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в данной точке $(x_0, f(x_0))$, соответствующей приращению её абсциссы x_0 на Δx.



x

$x_0+\Delta x$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям: Рассмотрим дифференцируемую функцию *y=f(x).*

$\Delta y = \mathrm{dy} + \alpha(x)$, $\Delta y \approx \mathrm{dy}$, $\Delta y = f'(x)\Delta x$, $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$

Получаем формулу, используемую в приближенных вычислениях:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x \approx f(x_0) + \mathrm{dy}$$

Пример: Вычислить $\sin 31^\circ$.

$$f(x) = \sin x,\quad f'(x) = \cos x,\quad x_0 = 3O^\circ,\quad \Delta x = 1^\circ$$

$$\sin 31^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}64$$

Правило Лопиталя

Если функции *f(x)* и *g(x)* дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, $\mathrm{g}'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{g}(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\mathrm{g}'(x)}.$$

Правило Лопиталя распространяется на раскрытие неопределенностей вида

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x}{2x^2+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-7}{4x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

Найти производные данных функций:

1. $y=\left(\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\cos 5x\right)^2$
2. $y=2^{-tg\,3x}+\sin\dfrac{x}{3}\cdot\ln^2 x$
3. $y=\dfrac{1}{3}arctg\,\dfrac{3-2x}{\sqrt{3}}$
4. $y=\ln\sqrt{\dfrac{2x-3}{4+3x}}$
5. $y=x^{\arcsin x}$

Вариант 2

Найти производные данных функций:

1. $y=\left(2x^5-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)^2$
2. $y=e^{x\cdot\cos x}+tg\,2x$
3. $y=arctg\,\dfrac{2-x}{2+x}$
4. $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-1}{5}\right)^3}$
5. $y=(tgx)^{\sin x}$

Вариант 5

Найти производные данных функций**:**

1. $y=\dfrac{1}{4}x^4+\sqrt{x}-2$
2. $y=2^{ctgx}-x^2\cdot\sin\dfrac{x}{3}$
3. $y=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}$
4. $y=\left(4x^3-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}-3\right)^2$
5. $y=3^{\frac{1}{x}}-x^3\cdot\cos 2x$

Вариант 6

Найти производные данных функций:

1. $y=\arccos\dfrac{3-x}{3+x}$
2. $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-9x}{3}\right)^3}$
3. $y=(\arccos)^{tgx}$
4. $y=\dfrac{1-\cos^{\frac{x}{2}}}{x^2}$
5. $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{-2x+3}$

Вариант 7

Найти производные данных функций:

1. $y=\left(3x-\dfrac{9}{x^2\sqrt{x}}+6\right)^2$
2. $y=2^{\sqrt[3]{x\cdot\cos x}}-\sin^3 3x$
3. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{3-x^2}{\sqrt{2}}$
4. $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{3-4x}{3+4x}\right)^2}$
5. $y=(\arcsin x)^{e^x}$

Вариант 8

Найти производные данных функций:

1. $y=2x^4\cdot\sqrt[3]{x}+5$
2. $y=e^{(1-x)\cdot\cos x}+ctg^2\,\dfrac{x}{2}$
3. $y=\ln\sqrt[6]{\left(\dfrac{4-3x}{5}\right)^5}$
4. $y=arctg\,\dfrac{1-2x}{1+2x}$
5. $y=(arctgx)^{\sin x}$

Практическая работа 5

Решение прикладных задач с помощью производной и дифференциалов

Цель: научиться исследовать функцию с помощью производной и строить график функции, применять дифференциалы в приближенных вычислениях.

Краткие теоретические сведения

Исследование функции с помощью производной

Определение. Числовая функция $y=f(x)$ называется монотонно возрастающей (убывающей) на множестве её области определения, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Приращение функции и приращение аргумента возрастающей (убывающей) функции имеют одинаковые (противоположные) знаки.

Теорема 1 (необходимое условие возрастания (убывания) функции). Если дифференцируемая функция возрастает (убывает) на некотором интервале, то в каждой точке этого интервала производная этой функции неотрицательна (неположительна).

Теорема 2_(достаточное условие возрастания (убывания) функции). Если производная функции на некотором интервале неотрицательна (неположительна), то на этом интервале функция возрастает (убывает).

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(a,в)$.

Определение. Точка $x_0 \in (a,в)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции, если найдётся некоторая окрестность этой точки, для всех точек которой будет выполняться условие: $f(x) \langle f(x_0) \quad (f(x) \rangle f(x_0))$

Определение. Точки локального максимума и минимума называют точками экстремума, а значения функции в этих точках −экстремумами функции.

Теорема 3 (необходимое условие существования экстремума функции). Если точка x_0 является точкой локального максимума (минимума) функции, то производная в этой точке равна нулю или не существует.

Данный признак не является достаточным для существования экстремума, т.е. из того, что производная равна нулю или не существует в некоторой точке, не следует, что в этой точке есть экстремум.

Точки, в которых первая производная равна нулю или не существует, называют *критическими точками первого рода*. Если функция имеет экстремумы, то они могут быть только в критических точках.

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности (за исключением, быть может, точки x_0).

Теорема 4 (первое достаточное условие существования экстремума). Если первая производная функции в точке x_o равна нулю или не существует и при переходе через неё производная меняет знак, то данная точка является точкой экстремума, причем если знак меняется с «+» на «-», то это точка максимума, с

«-» на «+» − точка минимума.

Теорема 5 (второе достаточное условие существования экстремума). Если функции *y=f(x)* определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f'(x)=0$, а $f''(x)\neq 0$, то в точке функция имеет максимум, если $f''(x)<0$, и минимум, если $f''(x)>0$.

Общая схема исследования функции

1. Определить область определения функции.
2. Проверить является функция чётной или нёчетной.
3. Функция $f(x)$ называется чётной, если $f(-x)=f(x)$ для любого x из области определения функции.
4. Функция $f(x)$ называется нёчетной, если $f(-x)=-f(x)$
5. Исследовать функцию на периодичность.
6. Функция $f(x)$ называется периодичной, если существует такое число $\square\neq 0$, что для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x-\square)=f(x)=f(x+\square)$
7. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва.
8. Функция $f(x)$ непрерывна, если приращение функции $\Delta f(x)$ стремится к нулю, при $\Delta x\to 0$, то есть если $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta f(x)=0$, то функция непрерывна.
9. Точки, в которых $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta f(x)$ не существует или равен ∞, называются точками разрыва.
10. Найти критические точки 1 рода.
11. Для этого определить производную функции $f(x)$ и приравнять её к нулю ($f'(x)=0$). Критическими называются точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует.
12. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
13. Для этого методом пробных точек в каждом интервале определяют знак $f'(x)$.
14. Если $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ на этом интервале возрастает, если $f'(x)<0$, то убывает.
15. Точка, при переходе через которую меняется знак производной $f'(x)$, называется экстремумом.
16. Если $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-» это максимум, если с «-» на «+» точка называется минимумом.
17. Найти критические точки 2 рода.
18. Для этого определить вторую производную $f''(x)$ и приравнять её к нулю ($f''(x)=0$).
19. Критическими точками называются точки, в которых $f''(x)=0$ или $f''(x)$ не существует.
20. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба.

21. Для этого методом пробных точек определяют знак $f''(x)$ в каждом интервале, образованном критическими точками 2 рода.
22. Если $f''(x)<0$, то график обращён выпуклостью вверх. Если $f''(x)>0$, то график обращен выпуклостью вниз.
23. Точка, где $f''(x)$ меняет знак, называется точкой перегиба.
24. Найти асимптоты графика функции.
25. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой. Её коэффициенты рассчитываются по формулам: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$.
26. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой, если предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или предел справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$.
27. Найти точки пересечения графика с осями координат.
28. Построить график функции.

Контрольные вопросы

1. Как найти интервалы возрастания и убывания функции?
2. Чем характеризуется возрастание и убывание функции *y=f(x)* в некотором интервале?
3. Какие точки называются критическими?
4. Что называют точками экстремума функции и как находятся?
5. Как найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции?
6. Как найти точки перегиба графика функции?
7. Что называют асимптотой кривой *y=f(x)*?
8. Перечислите применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

1. Исследовать функции и построить их график:

а) $y=x^3-4x^2-3x+6$

б) $y=\frac{2x+1}{x+5}$

2. Найти приближенное значение функции

$y=3x^2+5x+1$при $x=3, \Delta x=0{,}01$

3. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении площади квадратного помещения, если длина стороны измерена с погрешностью не более 0,5 м и составляет 4,6.

Вариант 2

1. Исследовать функции и построить их график:

а) $y=x^3-4x^2+5x+8$ б) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$

2. Найти приближенное значение функции

$y=\frac{1}{3}x^3+x^2+5$ при изменении аргумента от 3 до 3, 1.

3. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении объема куба, если ребро, равное 12,5 см, измерено с погрешностью, не превышающей 0,01 см. м составляет 4,6.

Вариант 3

1. Исследовать функции и построить их график:

а) $y = x^4 - 8x^2 - 9$

б) $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$

2. На сколько увеличится объём шара при нагревании, если его радиус R=5 см удлинится на 0,002.

3. Найти $\sqrt[5]{31}$, найти приближенно $Sin61^{\square}$

Вариант 4

1. Исследовать функции и построить их график:

а) $y = 3x^3 + 3x^2 - 1$

б) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

2. Найти увеличение куба при нагревании, если ребро 10 см удлинится на 0,01 см.

3. Найти $2{,}005^4$, найти приближенно $Cos61^{\square}$

Практические занятия по теме 2.2 «Интегральное исчисление»
Практическая работа 6
Интегрирование простейших функций

Цель: научиться вычислять неопределенные интегралы непосредственным интегрированием, методом замены переменной (подстановки) и по частям.

Краткие теоретические сведения

Понятие неопределенного интеграла

Основная задача дифференцирования − это нахождение производной функции *f (x).* Обратная задача – найти функцию *F(x)*, производная которой − заданная функция *f (x).* Для решения обратной задачи используется операция интегрирования.

Определение: Дифференцируемая функция *F(x),* определённая на некотором промежутке *x* называется *первообразной* для функции *f (x),* определённой на том же промежутке, если для всех *x* из этого промежутка выполняется равенство *F`(x) = f (x).*

Если функция *F(x)* есть первообразная для функции *f(x)* на некотором промежутке *x*, то функция *F(x) + C*, где *C* − произвольная постоянная, также является первообразной для функции *f (x)* на том же промежутке.

Совокупность всех первообразных для функции *f (x),* определённой на некотором промежутке *x*, называется *неопределённым интегралом от функции f (x)* на этом промежутке и обозначается: $\int f(x)dx = F(x) + C$

где *f (x)* – подынтегральная функция, *f (x) dx* – подынтегральное выражение, *x* − переменная интегрирования, *C* − постоянная интегрирования, $\int$ – знак интеграла.

Геометрический смысл: Неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, каждая из которых получается сдвигом одной из кривых вдоль оси *Oy*.

Теорема (необходимое условие существование): Если функция *f (x)* непрерывна на отрезке *[a, b]*, то для этой функции существует первообразная (и неопределенный интеграл).

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$
2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению $d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx$
3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$
4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен сумме интегралов от них: $\int [u(x) \pm v(x)]\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$
5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

Таблица основных формул интегрирования

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$ 1а). $\int dx = x + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$

9. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + C$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

12. $\int e^x dx = e^x + C$

13. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

14. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

15. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C$

16. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

17. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{2} arcctg\dfrac{x}{a} + C$

18. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

19. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a-x}{a+x}\right| + C$

20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$

22. $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

23. $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

Методы интегрирования

Неопределённые интегралы рассчитываются тремя методами.

Интегрирование в случаях, когда удается сразу воспользоваться табличными интегралами, называют *непосредственным*. Метод непосредственного интегрирования заключается в преобразовании подынтегральной функции и применении свойств неопределенного интеграла для приведения к табличным интегралам.

Пример: $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx = \int\left(3x^2+2-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)dx = 3\int x^2dx+2\int dx-3\int\frac{dx}{x}+7\int x^{-2}dx =$

$$= 3\frac{x^3}{3}+2x-3\ln|x|+7\frac{x^{-1}}{-1}+C = x^3+2x-3\ln|x|-\frac{7}{x}+C$$

Метод подстановки заключается в том, что путём введения новой переменной удаётся свести заданный интеграл к новому интегралу, который берётся непосредственным интегрированием.

Сделаем замену переменной интегрирования ***x***, положив $x = \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию).

Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Подразумевается, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет подставлено его выражение через x (возвращение к исходной переменной). Функцию $\varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы вычисление интеграла в правой части было максимально простым.

Пример: $\int\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}$. Положим $x = at$, откуда $dx = a\,dt$, $t=x/a$. Исходный интеграл примет вид $\int\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}=\int\frac{\mathrm{adt}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{a}^2\mathrm{t}^2}=\int\frac{adt}{a^2(1+t^2)}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{arctgt}+\mathrm{C}=$ $\frac{1}{\mathrm{a}}\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}+\mathrm{C}$ Т.о $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$

Рассмотрим другой ***пример***:

$$\int \mathrm{tgxdx}=\int\frac{\sin\mathrm{xdx}}{\cos\mathrm{x}}= [cosx = t;\ sinxdx = -dt] = -\int\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}}=-\ln|\mathrm{t}|+\mathrm{C}=-\ln|\cos\mathrm{x}|+\mathrm{C}$$

Метод интегрирования по частям заключается в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде произведения множителей u и dv, при этом dx входит в dv. В результате заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int vdu$. Таким образом, используется формула: $\int udv=u\cdot v-\int vdu$

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разбиение подынтегрального выражения на u и dv. Существуют несколько типов интегралов:

1. Подынтегральное выражение содержит многочлен относительно переменной x и функции, для которых существует табличная первообразная (например $cos\ ax;\ sin\ ax$ и др.), тогда за u выбирают многочлен, а за dv все остальные множители.

2. Подынтегральное выражение содержит многочлен относительно переменной x и функцию, для которой не существует табличных интегралов, тогда за dv выбирают многочлен, умноженный на dx, а за u принимают функцию, для которой нет табличной первообразной, но можно найти дифференциал du.

3. В некоторых видах интегралов за функцию u можно принимать любой из множителей подынтегрального выражения, если каждый из них имеет табличную первообразную.

Пример: $\int (2x-3)e^x dx$ [*u=2x-3; du =2 dx;* $dv = \int e^x dx, v = e^x + C$] = $e^x \cdot (2x-3) - 2\int e^x dx$.

Таким образом, $\int (2x-3)e^x dx = e^x \cdot (2x-3) - 2e^x + C$

$\int (3x) \cdot \ln x \cdot dx$ [$u = \ln x$; $du = 1/x\ dx$; $dv = \int 3x dx, v = \dfrac{3x^2}{2} + C$] Тогда

$$\int (3x) \cdot \ln x \cdot dx = = \frac{3}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{2}\int \frac{x^2}{x} dx = \frac{3}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + C$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределённым интегралом? Каков его геометрический смысл?
3. Сформулируйте свойства неопределённых интегралов.
4. Каковы основные методы интегрирования функций?
5. В чём заключается метод подстановки?
6. Укажите целесообразные подстановки для отыскания интегралов: $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$, $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$, $\int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$, $\int x^5 \sqrt[3]{1+4x^6} dx$
7. Выведите формулу интегрирования по частям.
8. Укажите некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием:

1. $\int \left(3x^2 + \sqrt{x} + 2\right) dx$
2. $\int \sin x \cdot \cos x\ dx$
3. $\int \frac{\ln x}{x} dx$
4. $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx$
5. $\int \cos x \cdot e^x\ dx$
6. $\int x \cdot \sin 2x\ dx$

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием:

1. $\int \left(5x^3 + x\sqrt{x} + 1\right) dx$
2. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$
3. $\int \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}\ dx$
4. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx$
5. $\int x \cdot \ln x\ dx$
6. $\int x \cdot \sin 3x\ dx$

Вариант 3

Найти неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием:

1. $\int\left(2x^2+\frac{1}{x^3}-3\right)dx$ 2. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$

3. $\int\left(2x^2-x\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x}\right)dx$ 4. $\int ctg(2x+1)\,dx$

5. $\int\left(2^x+3^x\right)dx$ 6. $\int x\cdot\cos 2x\ \ dx$

Вариант 4

Найти неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием:

1. $\int\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)dx$ 2. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$

3. $\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ 4. $\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}$

5. $\int(x+1)\cdot 2^x\,dx$ 6. $\int x\cdot e^x\,dx$

Вычислите неопределенный интеграл непосредственным интегрированием:

1. $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$;2. $\int\left(x^4+\sqrt[5]{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$; 3. $\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

Вычислите неопределенный интеграл методом подстановки:

1. $\int\sin(3x+5)\,dx$; 2. $\int e^{2x}\,dx$; 3. $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$; 4. $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$; 5. $\int x^2\cdot\sqrt[5]{x^3-8}\,dx$.

Вычислить неопределенный интеграл интегрированием по частям:

1. $\int\boxed{n}x\,dx$; 2. $\int x\cdot e^x dx$; 3. $\int\arccos x\,dx$; 4. $\int e^x\cdot\sin x\,dx$.

Практическая работа 7

Приближённое вычисление определённого интеграла по формуле прямоугольников и трапеций

Цель: научиться вычислять определённые интегралы приближённым методом и осуществлять проверку правильности решения, используя формулу Ньютона-Лейбница.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой определённый интеграл?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Сформулируйте свойства определённого интеграла.
4. Перечислите методы нахождения определённого интеграла.
5. Какие формулы используются при приближённом вычислении определённых интегралов.

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

Вычислите приближенно интеграл $\int_0^{10}\left(3x^2+2x+2\right)dx$ по формуле трапеций при n = 10

Вариант 2

Вычислите приближенно интеграл $\int_0^{8}\left(3x^2-4x+1\right)dx$ по формуле трапеций при n = 10

Вариант 3

Вычислите приближенно интеграл $\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ по формуле прямоугольников при n = 10, с точностью до 0,01

Вариант 4

Вычислите приближенно интеграл $\int_1^{2}\frac{dx}{x}$ по формуле трапеций при n = 10, с точностью до 0,0001

Вариант 5

Вычислите приближенно интеграл $\int_1^{2}\frac{dx}{x}$ по формуле прямоугольников при n = 10, с точностью до 0,0001

Вариант 6

Вычислите приближенно интеграл $\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ по формуле трапеций при n = 10, с точностью до 0,0001

Практическая работа 8
Решение прикладных задач с помощью интеграла

Цель: научиться использовать определенные интегралы для вычисления площадей плоских фигур, ограниченных линиями, а также различных физических величин.

Контрольные вопросы

1. В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Назовите области применения определенного интеграла.

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=-\frac{1}{3}x^2+3,\ y=0,\ x=0$

б) $y=\frac{1}{4}x^2;\ y=-\frac{1}{2}x^2+3x$

2.Вычислить силу давления на прямоугольную пластинку с основанием 16 см и высотой 24 см, погруженную вертикально в воду так, что верхнее основание пластинки находится на 10 см ниже свободной поверхности воды.

Вариант 2

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=9-x^2,\ y=0$

б) $y=x^2+3;\ y=2x\ +6$

2. Вычислить силу давления на прямоугольную пластинку с основанием 8 см и высотой 10 см, погруженную вертикально в воду так, что верхнее основание пластинки находится на 2 см ниже поверхности воды.

Вариант 3

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 4 - x^2$, $y = 0$

б) $y + x - 5 = 0$; $x - 2y + 4 = 0$; $y = 0$

2. Вычислить силу давления на треугольник с основанием 10 см и высотой 4 см, погруженный вертикально в воду так, что его вершина лежит на поверхности воды.

Вариант 4

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$, $y = 0$, $x = 0$

б) $y = x^2$; $y = 5x - 6$

2. Треугольная пластина с основанием 0,2 см и высотой 0,4 см, погружена вертикально в воду так, что его вершина лежит на поверхности воды. Вычислить силу давления воды на пластину.

Практические занятия по теме 2.3 «Дифференциальные уравнения»
Практическая работа 9
Решение дифференциальных уравнений

Цель: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка, определять общее и частное решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Приведите примеры
2. Что является решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое − частным?
4. Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?
5. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
6. Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделёнными и разделяющимися переменными?
7. Как решается уравнение с разделёнными переменными?
8. Алгоритм решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

Решите уравнение с разделенными переменными:

1. $2y^2 dy = 3x dx$ 2. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Найдите общее решение уравнения с разделяющимися переменными:

3. $x dy + 2y dx = 0$ 4. $y' = y^2 \cos x$

Вариант 2

Решите уравнение с разделенными переменными:

1. $2y dy = (1 - 3x^2)dx$ 2. $\frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{x} = 0$

Найдите общее решение уравнения с разделяющимися переменными:

3. $\frac{dy}{2x} + y dx = 0$ 4. $t dx - dx + x dt = 0$

Вариант 3

Решите уравнение с разделенными переменными:

1. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x-1}$ 2. $e^x dx = ydy$

Найдите общее решение уравнения с разделяющимися переменными:

3. $x^2 dy = y^2 dx$ 4. $y' - y - 1 = 0$

Вариант 4

Решите уравнение с разделенными переменными:

1. $\sqrt{y}dy = 3\sqrt{x}dx$ 2. $tgtdt + \dfrac{ds}{s} = 0$

Найдите общее решение уравнения с разделяющимися переменными:

3. $y' = x$ 4. $y' + 2x^2y' + 2xy - 2x = 0$

Практические занятия по теме 2.4 «Ряды»
Практическая работа 10
Исследование рядов на сходимость

Цель: изучить понятия: числовой ряд, сумма числового ряда, сходящийся, расходящийся ряд, ряд с положительными членами, знакочередующийся ряд; рассмотреть теоремы сравнения рядов с положительными членами; научиться находить сумму ряда пользуясь определением, исследовать на сходимость положительные и знакочередующиеся ряды.

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется ***числовым рядом***.

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2 \ldots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ называются ***частными (частичными) суммами*** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***сходящимся***, если сходится последовательность его частных сумм. ***Сумма сходящегося ряда*** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется ***расходящимся*** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

Теорема. Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна *S*, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна *CS. (C ≠ 0)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$.***Суммой*** или ***разностью*** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема. Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно *S* и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится, и его сумма равна *S* + σ.

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Задания для выполнения практической работы

Вариант 1

1. Исследуйте ряд на сходимость, используя определение: $1+1^{\frac{1}{3} ¿ ¿ \frac{1}{3} ¿ ¿ \cdot\frac{1}{3}+1\cdot ¿}$ +…

2. Исследуйте ряд на сходимость, используя теоремы сравнения рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}$$

Вариант 2

1. Используйте ряд на сходимость, используя определение: 3+3 $\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+¿$ …

2. Исследуйте ряд на сходимость, используя теоремы сравнения рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+3}$$

Практическая работа 11

Построение графиков простых и сложных гармонических колебаний

Цель: сформировать навыки построения графиков гармонических колебаний; закрепить умения преобразования графиков функций; применить знания к решению нестандартных задач по смежным дисциплинам.

Краткие теоретические сведения

Гармонические колебания – это периодические изменения физической величины в зависимости от времени, происходящие по закону синуса или косинуса. Графиком гармонического колебания является *синусоида* или *косинусоида*, по которой можно определить все *характеристики колебательного движения:* амплитуду, период, частоту, начальную фазу.

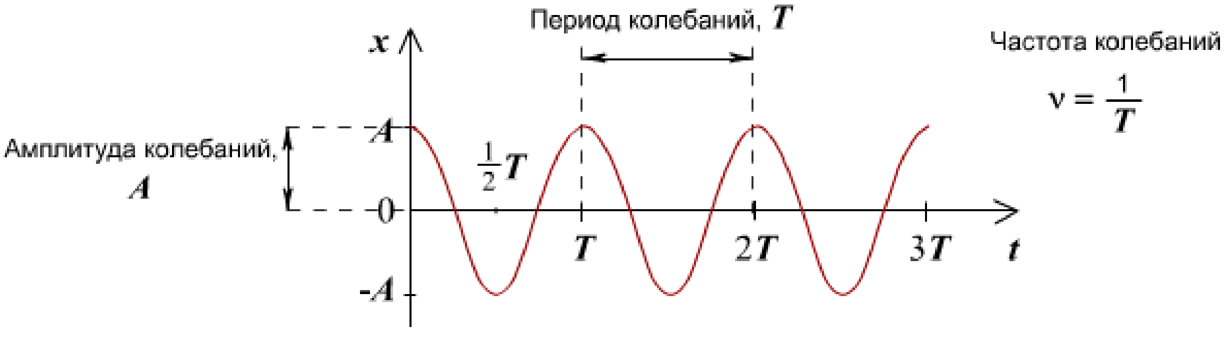


График зависимости смещения от времени

Гармонические колебания играют важную роль в физике, электротехнике. Наша задача – построить графики гармонических колебаний, применив при этом все известные правила преобразований графиков без помощи трудоёмких вычислений и научиться описывать по ним колебательный процесс.

Гармонические колебания подчиняются следующему закону:

$$f(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi) \text{ или } f(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi), \text{где}$$

A – амплитуда, $\omega -$ циклическая (круговая) частота,
$\varphi -$ начальная фаза колебаний, обычно $\varphi \in [0;\, 2\pi)$;

Период гармонических колебаний ***T*** можно вычислить по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Для построения графиков гармонических колебаний необходимо иметь представление о правилах построения графиков функций и их преобразованиях.

Задания для выполнения практической работы

Задание 1. Сгруппируйте функции по общему признаку:

Изменение аргумента
Изменение функции
y = cos(x+2)
y = sinx +2
y = sin2x
y = ctgx +1
y = ctg1/3x
y = 4 - cosx
y = tg2x
y = 2ctgx
y = sin(x-5)
y = - 3cosx

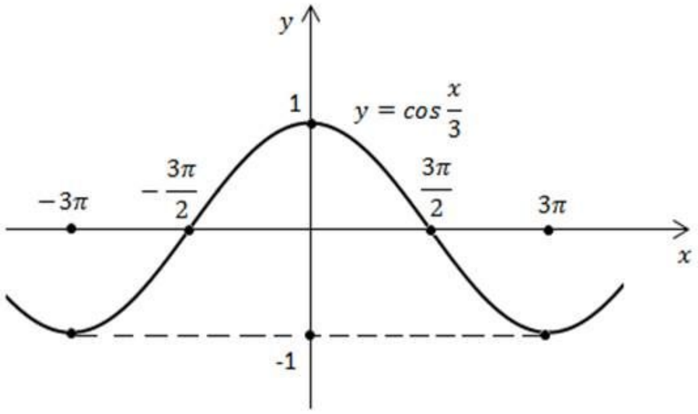
Задание 2. Построить график гармонических колебаний *y = 2sin(2x-* $\frac{\pi}{3}$).

Задание 3. Построить графики функций и определить основные характеристики гармонического колебания:

а) $y = sin\frac{x}{3}$ б) $y = sin3x$

Задание 4. Построить графики гармонических колебаний:

$y = -ctgx$ $y = cos\frac{x}{3}$ $y = -sin(x+\frac{\pi}{6})$.



Задание 5. Тело движется по закону $y = cos\frac{x}{3}$. По графику (рис) функции установите:

- Амплитуду колебаний **А**;
- Частоту колебаний ω;
- Период колебаний T ;
- Начальную фазу φ.

Практические занятия по теме 3.1 «Основы теории комплексных чисел»

Практическое занятие 12

Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме. Изображение комплексных чисел на координатной плоскости

Цель: научиться совершать действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах, изображать комплексные числа на координатной плоскости.

Краткие теоретические сведения

Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами

Комплексными числами называются выражения вида $Z = a + bi$, где a и b – любые действительные числа, i - мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$.

Числа a и b называют действительной и мнимой частями Z и обозначают символами $a = \operatorname{Re} Z$, $b = \operatorname{Im} Z$

Для комплексных чисел $Z_1 = a_1 + b_1 i$ и $Z_2 = a_2 + b_2 i$ введены понятия равенства и арифметические операции по правилам:

1) $Z_1 = Z_2$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$;

2) $Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$;

3) $Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i$;

4) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$, где $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Пример: Найти сумму, разность, произведение и частное чисел $Z_1 = -3 + 2i$ и $Z_2 = 13 - i$.

1) $Z_1 + Z_2 = (-3 + 2i) + (13 - i) = 10 + i$;

2) $Z_1 - Z_2 = (-3 + 2i) - (13 - i) = -16 + 3i$;

3) $Z_1 \cdot Z_2 = (-3 + 2i)(13 - i) = -39 + 3i + 26i + 2 = -37 + 29i$;

4) $\dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{13-i}{-3+2i} = \dfrac{(13-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \dfrac{-39+3i-26i+2i^2}{(-3)^2-(2i)^2} = \dfrac{-39-2+23i}{9+4} = = -\dfrac{41}{13} - \dfrac{23}{13}i$.

Замечание: Понятия «больше», «меньше» для комплексных чисел не определяются. Записи $i > 0,\ 1 + i < 2$ и им подобные лишены всякого смысла.

Комплексное число Z, у которого $\mathrm{Re}Z = 0$, т.е. a=0 называется *чисто мнимым* числом и записывается так: $Z = bi$.

Если $\mathrm{Im}Z = 0$, то $Z = a$ *– число действительное.*

Комплексное число $\bar{Z} = a - bi$ называется *сопряжённым* к комплексному числу $Z = a + bi$.

Произведение $Z \cdot \bar{Z} = (a - bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ – положительное действительное число.

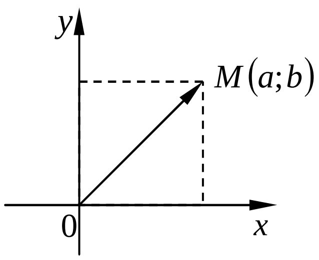
Комплексное число $-\ a - bi$ называется *противоположным* к комплексному числу $a + bi$ и обозначается $-Z$, т.е. $-Z = -a - bi$.

Сумма чисел Z и $-Z$ равна нулю, т.е. $(a + bi) + (-a - bi) = 0$.

Комплексное число $Z = a + bi$ равно нулю в том и только в том случае, если равны нулю его действительная и минимальная части, т.е. $a + bi = 0$, если $a = 0$ и $b = 0$.

Представление комплексного числа Z в виде $a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел



Каждому комплексному числу $Z = a + bi$ может быть поставлена в соответствие точка $M(a;b)$, и, наоборот, каждой точке $M(a;b)$ плоскости – комплексное число $Z = a + bi$. Установленное таким образом соответствие является, очевидно, взаимно однозначным. Оно дает возможность рассматривать комплексные числа как точки координатной плоскости. Эту плоскость называют комплексной плоскостью. Ось абсцисс называют *действительной осью,* а ось ординат – *мнимой осью.* Часто удобно истолковывать комплексное число $Z = a + bi$ как вектор $\vec{OM}$. Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $M(a;b)$ соответствует комплексное число $Z = a + bi$ и наоборот. Точке $O(0;0)$ соответствует нулевой вектор.

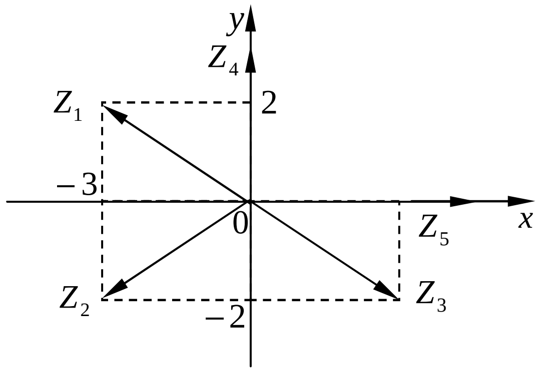
Модулем комплексного числа $Z = a + bi$ называется длина соответствующего этому числу вектора $\vec{OM}$. Обозначается модуль числа Z так: $|Z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргументом комплексного числа $Z = a + bi$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\overrightarrow{OM}$. Обозначается аргумент комплексного числа так: $\arg Z = \varphi$, где $0 \le \arg Z < ad$ **.**

Очевидно, $\varphi = \arg Z$ есть однозначная функция от $Z \neq 0$. Вводят ещё и многозначную функцию $\varphi = ArgZ = \arg Z + 2\pi n$, где $n = 0;\pm1;\pm2,...$

Для определения аргумента комплексного числа служит система уравнений

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ или уравнение $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$ при $a \neq 0$.



Пример: Изобразить на комплексной плоскости числа:

$z_1 = -3 + 2i$; $z_2 = -3 - 2i$; $z_3 = 3 - 2i$; $z_4 = 4i$; $z_5 = 5$; $z_6 = -2i$

Замечание. Комплексно-сопряженные числа располагаются симметрично относительно оси Ox, а противоположные комплексные числа – симметрично относительно начала координат.

Пример: Построить комплексное число $Z = 1 + i$ и найти его модуль и аргумент.

Модуль числа $Z = 1 + i$ равен $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

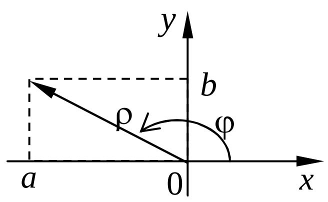
Аргумент числа $Z = 1 + i$ равен $\varphi = \arg Z = \dfrac{\pi}{4}$

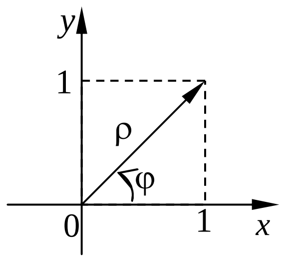
$Z = a + bi$

Тригонометрическая форма комплексного числа

Действительная и мнимая части комплексного числа $Z = a + bi$ выражаются через его модуль ρ и аргумент φ: $a = \rho\cos\varphi$; $b = \rho\sin\varphi$. Отсюда, $Z = 1 + i$

$$Z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$





Это и называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Пример: Комплексные числа $z_1 = 3 - 3i$; $z_2 = -5$; $z_3 = 2i$ представить в тригонометрической форме.

1) $z_1 = 3 - 3i$; $|z| = \rho = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$; $tg\varphi = \dfrac{-3}{3} = -1$. $\varphi_0 = arctg -1 = -\dfrac{\pi}{4}$;

$\arg Z = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. $Z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

2) $z_2 = -5$ можно представить в виде $z_2 = -5 + 0i$. Модуль его равен $|z| = \rho = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$. Аргумент равен $\arg Z = \pi$. $z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$.

3) $z_3 = 2i$ можно представить в виде $z_3 = 0 + 2i$. Модуль его равен $|z| = \rho = \sqrt{0 + 2^2} = 2$. Аргумент равен $\arg Z = \frac{\pi}{2}$. $z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Пусть даны два числа, записанных в тригонометрической форме:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Представим в тригонометрической форме их произведение:

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)$,

или $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

Найдем частное двух комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)},$$

$$\text{или}\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Модуль частного двух комплексных чисел равен частному их модулей, разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Возведём комплексное число $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень n. $[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

При возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

Эта формула носит название *формула Муавра.*

Пусть $n-$ натуральное число.

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)]} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0;\pm1;\pm2,...$$

Эта формула дает n различных чисел $Z_0, Z_1, Z_2, ..., Z_{n-1}$ соответствующих значениям $n = 0,1,2,...,n-1$.

Пример: Даны числа $Z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ $Z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$.

Найти: $Z_1 \cdot Z_2$; $\frac{Z_1}{Z_2}$.

1) $Z_1 \cdot Z_2 = 6\cdot 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)\right]=12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{6}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}\right)\right]=3\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$.

Пример: Дано число $Z=-3-\sqrt{3}i$. Найти Z^4 и $\sqrt[3]{Z}$.

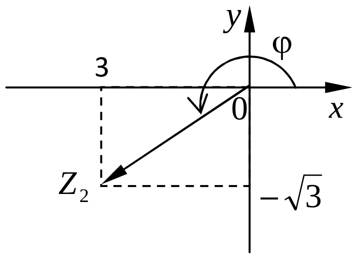


Рис. 6.7.

Представим Z в тригонометрической форме

$|Z|=2\sqrt{3}$; $tg\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\varphi_0 = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\arg Z=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$;

$Z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$.

По формуле Муавра найдем Z^4.

$$Z^4=\left[2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\right]^4=\left(2\sqrt{3}\right)^4\left(\cos 4\cdot\frac{7\pi}{6}+i\sin 4\cdot\frac{7\pi}{6}\right)=144\left(\cos\frac{14\pi}{3}+i\sin\frac{14\pi}{3}\right).$$

Найдем значения $\sqrt[3]{Z}=\sqrt[3]{2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{7}{6}\pi+2\pi n\right)+i\sin\left(\frac{7}{6}\pi+2\pi n\right)\right]}=$

$$=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\frac{7}{6}\pi+2\pi n}{3}+i\sin\frac{\frac{7}{6}\pi+2\pi n}{3}\right)=Z_n.$$

Здесь n принимает значения 0, 1, 2. При $n=0$, $Z_0=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$;

При $n=1$, $Z_1=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{19\pi}{18}+i\sin\frac{19\pi}{18}\right)$; При $n=2$, $Z_2=\sqrt[3]{2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{31\pi}{18}+i\sin\frac{31\pi}{18}\right)$.

Показательная форма комплексного числа

Пусть дано комплексное число $Z=a+bi\ =\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. *Формула Эйлера* $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(-\infty<\varphi<\infty)$ *позволяет записать комплексное число так:* $Z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho\cdot e^{i\varphi}$, где ρ – модуль комплексного числа Z, а φ – аргумент комплексного числа Z.

$Z=\rho\cdot e^{i\varphi}$ – *показательная форма* комплексного числа Z

Пример: Представить число $Z=-2+2i$ в показательной форме.

$|Z|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, и $\varphi=\arg Z=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$. Показательная форма Z:

$Z=-2+2i=2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

Контрольные вопросы

1. Какое число называется комплексным? Какие комплексные числа называются чисто мнимыми? Приведите примеры комплексных чисел, чисто мнимых чисел.

2. Какие комплексные числа называются равными? Какие комплексные числа называются сопряжёнными?
3. Как записывается комплексное число в алгебраической форме?
4. Как выполняются операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме?
5. Как геометрически изображаются комплексные числа?
6. Что называется модулем и аргументом комплексного числа? Запишите формулы для модуля и аргумента.
7. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
8. Как умножить и разделить комплексные числа, записанные в тригонометрической форме?
9. Как возвести в степень комплексные числа, записанные в тригонометрической форме?
10. Сколько значений имеет корень ***n***- степени из комплексного числа? Как найти все значения корня ***n***- степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме?
11. Как записывается комплексное число в показательной форме?
12. Как умножить и разделить комплексные числа, записанные в показательной форме?
13. Как возвести в степень комплексные числа, записанные в показательной форме?
14. Как найти все значения корня ***n***- степени из комплексного числа, записанного в показательной форме?

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

Произвести сложение и вычитание:

1. $(3+5i)+(7-2i)$ 2. $(3-2i)-(5+i)$

Произвести умножение:

3. $(2+3i)\cdot(5-7i)$ 4. $(3-2i)\cdot(7-i)$

Выполнить деление:

5. $\dfrac{5i}{3+2i}$ 6. $\dfrac{3-i}{5-3i}$

Записать в тригонометрической форме и изобразить на плоскости:

7. $z=\sqrt{3}+i$

Найти произведение:

8. $z_1=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

$z_2=0{,}4\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

Вариант 2

Произвести сложение и вычитание:

1. $(-2+3i)+(7-2i)$ 2. $(-5+2i)-(5+2i)$

Произвести умножение:

3. $(1-i)\cdot(1+i)$ 4. $(6+4i)\cdot(3i)$

Выполнить деление:

5. $\dfrac{-2i}{5-i}$ 6. $\dfrac{3+2i}{1-5i}$

Записать в тригонометрической форме и изобразить на плоскости:

7. $z=-10$

Найти произведение:

8. $z_1=(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

$z_2=3(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$

Вариант 3

Произвести сложение и вычитание:

1. $(6+2i)+(5+3i)$ 2. $(4+2i)-(-3+2i)$

Произвести умножение:

3. $(6+4i)\cdot(5+2i)$ 4. $(-2+3i)\cdot(3+5i)$

Выполнить деление:

5. $\frac{3+2i}{5i}$ 6. $\frac{5-7i}{5+7i}$

Записать в тригонометрической форме и изобразить на плоскости:

7. $z=2\sqrt{2}-2i$

Найти произведение:

8. $z_1=5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$z_2=0{,}6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Вариант 4

Произвести сложение и вычитание:

1. $(5-4i)+(6+2i)$ 2. $(-3-5i)-(7-2i)$

Произвести умножение:

3. $(3+2i)\cdot(1+i)$ 4. $(2-3i)\cdot(-5i)$

Выполнить деление:

5. $\frac{6-7i}{i}$ 6. $\frac{1+i}{1-i}$

Записать в тригонометрической форме и изобразить на плоскости:

7. $z=6i$

Найти произведение:

8. $z_1=2{,}4(\cos\pi+i\sin\pi)$

$z_2=0{,}5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

Практическая работа 13
Применение комплексных чисел при решении задач по видам профессиональной деятельности

Цель: научиться решать задачи по видам профессиональной деятельности, совершая действия над комплексными числами в показательной, тригонометрической и алгебраической форме.

Материально-техническое оснащение: рабочее место; учебно-методические пособия; доска.

Контрольные вопросы

1. Какое число называется комплексным?
2. Как записывается комплексное число в алгебраической форме?
3. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
4. Как записывается комплексное число в показательной форме?
5. Какое применение нашли комплексные числа в электротехнике?
6. Каким уравнением задается переменное напряжение u, сила тока i и электродвижущая сила e?
7. Что называется комплексом напряжения $\dot{U}$, как определяется комплекс тока $\dot{I}$, комплекс э.д.с $\dot{E}$?

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

Написать комплексные числа, соответствующие уравнениям (считать $w = 314\,{}^{рад}/_{с}$):

1. $u = 2\sin\left(wt + \frac{\pi}{6}\right)$ 2. $i = 4\sin(wt + 20^\circ)$

3. $e = 0{,}8\sin(wt - 3)$

Считая $w = 314\,{}^{рад}/_{с}$ написать уравнение переменного напряжения по данному комплексу напряжения:

4. $\dot{U} = 220e^{-40^\circ}$ 5. $\dot{U} = -55 + 55i\sqrt{3}$

Вариант 2

Написать комплексные числа, соответствующие уравнениям (считать $w = 314\,{}^{рад}/_{с}$):

1. $u = 2{,}5\sin(wt + 1{,}5\pi)$ 2. $i = 2\sin(wt + 40^\circ)$

3. $e = 220\sin(wt - 90^\circ)$

Считая $w = 314\,{}^{рад}/_{с}$ написать уравнение переменного напряжения по данному комплексу напряжения:

4. $\dot{U} = 150e^{90^\circ}$ 5. $\dot{U} = -100i$

Задание для самостоятельной работы студентов

1. Записать в алгебраической и показательной формах комплексные числа:
$z_1 = 8\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right)$ $z_2 = 6{,}3(\cos 10\pi + i\sin 10\pi)$

2. Выполнить умножение, деление комплексных чисел, предварительно записав в тригонометрической и показательной форме числа:
а) $(3+5i)$ и $(3-2i)$ б) $(-3+2i)$ и $(6+2i)$
3. Найти z^4, $\sqrt[3]{z}$ для $z = -5+5i$, предварительно записав в тригонометрической и показательной формах.
4. Найдите суммарное напряжение, если генераторы, дающие напряжение соединены последовательно: $u_1 = 150\sin(wt+2)$ $u_2 = 350\sin(wt-3)$.
5. Написать уравнение переменного напряжения по данному комплексу напряжения: $\dot{U} = 127e^{90^\circ}$, $\dot{U} = 12 + 12i$

Практические занятия по теме 4.1
«Основы математической статистики»
Практическое занятие 14
Решение простейших задач математической статистики

Цель: научиться решать задачи на определение основных числовых характеристик случайной величины.

Краткие теоретические сведения

Основные понятия

Теория вероятностей рассчитывает различные характеристики случайной величины X исходя из предположения, что известен закон распределения этой величины (для д.с.в.) или плотность вероятности (для н.с.в.). В этом случае методы теории вероятности дают возможность находить вероятности тех или иных событий, связанных с этой случайной величиной, её числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану и т.д.) и тому подобное.

В математической статистике закон распределения исследуемой случайной величины X неизвестен, а известен только набор значений, которые случайная величина приняла в результате проведения некоторого числа случайных экспериментов.

Такой набор значений называется статистическими данными. По этим данным необходимо оценить необходимые характеристики самой случайной величины. В связи с этим возникают следующие задачи математической статистики:

1. Указать способы сбора и группировки статистических данных.
2. Разработать методы анализа собранных данных для получения всевозможных объективных характеристик изучаемой случайной величины (оценка вероятностей интересующих событий, восстановление закона (или функции) её распределения, определение числовых характеристик, оценка степени зависимости от других случайных величин и т.д.).

Вариационные ряды и их характеристики

Вариационный ряд – это запись результатов измерений какой-либо случайной величины в виде последовательности чисел. Значения исследуемой случайной величины называют *вариантами*.

Упорядоченный вариационный ряд – это последовательность вариант, записанная в порядке возрастания (или убывания).

Для обработки результатов статистических наблюдений их удобно оформлять в виде *таблицы частот*.

Статистическое распределение – таблица частот, в которой указаны значения случайной величины x_i и соответствующие частоты m_i , показывающие, сколько раз в выборке встретилось данное значение случайной величины.

Для получения *интервальной таблицы частот* (интервального вариационного ряда) весь диапазон измеренных значений случайной величины X делят на k интервалов ($□_i□_{i+1}$) и подсчитывают количество (m_i) значений случайной величины, попавших на соответствующий интервал. Кроме того, в таблице указывают также величину $\bar{x}_i$ - середину i-ого интервала:

№ интервала	Интервал	Середина интервала	Частота
1	$(□_1 , □_2)$	$\bar{x}_1$	m_1
2	$(□_2 , □_3)$	$\bar{x}_2$	m_2
…	…	…	…
K	$(□_k , □_{k+1})$	$\bar{x}_k$	m_k

Здесь $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$ (n – объём выборки, т. е. количество всех вариант).

Иногда вместо таблицы частот составляют таблицу относительных частот $w_i = \frac{m_i}{n}$, (n – объём выборки), очевидно, $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.

Для графического представления вариационных рядов используют полигон, гистограмму, кумуляту.

Полигон – это ломаная, соединяющая точки с координатами (x_i; m_i).

Гистограмма – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки оси, равные интервалам (□i , □i+1), а высоты пропорциональны частотам m_i , (или относительным частотам w_i).

Кумулята (*кумулятивная кривая*) – это ломаная, соединяющая точки с координатами (x_i; $m_i^{н}$) или (x_i; $w_i^{н}$), где $m_i^{н} = m_1 + m_2 + ... + m_i = \sum_{j=1}^{i} m_j$ – накопленная частота; $w_i^{н} = w_1 + w_2 + ... + w_i = \sum_{j=1}^{i} w_j$ – накопленная относительная частота.

При обработке вариационных рядов обычно подсчитывают их сводные числовые характеристики: средние величины и показатели вариации.

К средним величинам относятся среднее арифметическое, медиана и мода.

Среднее арифметическое всех вариант вычисляется по формуле $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

где x_i – значения вариант, n – общее количество вариант.

Медиана – это значение, которое делит упорядоченный вариационный ряд на две равные по количеству элементов части.

Мода – это варианта, которой соответствует наибольшая частота.

К показателям вариации относятся размах, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратичное отклонение.

Размах – это разность между наибольшим и наименьшим значениями вариант: $R = X_{max} - X_{min}$ *Дисперсия* вычисляется по формуле $D = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2$.

Среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D}$.

Выборочный метод. Статистические оценки параметров генеральной совокупности

Генеральной совокупностью называется весь набор однородных объектов, изучаемых относительно некоторого качественного или количественного признака. Число всех изучаемых объектов N называется объёмом генеральной совокупности.

Выборка – это та часть генеральной совокупности, элементы которой подвергаются статистическому обследованию. Число n вошедших в выборку элементов называется объемом выборки.

Одна из задач математической статистики – оценка параметров генеральной совокупности по данным выборки.

Статистические оценки бывают *точечные* (определяемые одним числом) и *интервальные* (определяемые двумя числами − концами интервала). Точечные оценки дают представление о величине соответствующего параметра, а интервальные характеризуют точность и достоверность оценки.

Для достоверности результатов точечная оценка должна быть несмещённой, состоятельной и эффективной. Этим условиям удовлетворяют следующие оценки:

для математического ожидания генеральной совокупности –

выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i m_i$;

для дисперсии генеральной совокупности –

выборочная дисперсия $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 m_i$;

для среднего квадратичного отклонения генеральной совокупности –

стандартное отклонение $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 m_i}$.

Пример: Дано статистическое распределение выборки объема $n=20$:

x_i	*2*	*4*	*6*
n_i	*3*	*10*	*7*

Найти все числовые характеристики этого распределения.

Ответ: $\bar{x} = 4.4$, $\bar{D} = 1.84$, $\bar{\sigma} = 1.4$, $R = 4$, $\nu = 31\%$, $M_o = 4$, $M_e = 4$.

Пример: Из 1500 деталей отобрали 250. Дан интервальный ряд размеров отобранных деталей:

Размер	*7.8 − 8.0*	*8.0 − 8.2*	*8.2 − 8.4*	*8.4 − 8.6*	*8.6 − 8.8*	*8.8 − 9.0*
количество	*5*	*20*	*80*	*95*	*40*	*10*

Оценить средний размер детали и соответствующую дисперсию.

Решение. Изучаемая н.с.в. X − размер детали. Среднее значение этой с.в. и её дисперсия оцениваются выборочным средним и исправленной выборочной дисперсией:

Поскольку задан интервальный (а не дискретный) ряд, то в качестве вариант $\{x_i\}$ берутся середины соответствующих интервалов: *7.9, 8.1, ... , 8.9* . Подставляя данные в выписанные формулы, получим $\bar{x} = 8.44$, $S^2 = 0.042$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение вероятности события.
2. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
3. Что называется условной вероятностью?
4. Как формулируется теорема умножения вероятностей?

Задание для выполнения практической работы

Вариант 1

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон её распределения:

X	-1	0	1	2	3
p	0,20	0,10	0,25	0,15	0,3

2. Построить полигон относительных частот по данному распределению:

x	1	4	5	7	10
n	20	10	6	4	10

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и исправленную выборочную дисперсию.

3. Построить гистограмму статистического распределения данной выборки:

x	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n	2	5	3	6	1	3

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант 2

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	-8	-4	-1	1	3	7
p	1/12	1/6	1/4	1/6	1/12	1/4

2. Построить полигон относительных частот по данному распределению:

x	15	20	25	30	40
n	10	15	30	20	25

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и исправленную выборочную дисперсию.

3. Построить гистограмму статистического распределения данной выборки:

x	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140
n	8	15	46	29	13	6

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант 3

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон её распределения:

X	-2	-1	0	1	2	3
p	1/6	1/6	1/12	1/3	0	1/4

2. Построить полигон относительных частот по данному распределению:

x	1	4	5	8	9
n	15	25	30	20	10

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и исправленную выборочную дисперсию.

3. Построить гистограмму статистического распределения данной выборки:

x	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
n	8	15	22	35	14	6

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Вариант 4

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная закон её распределения:

X	0	1	2	3	4
p	0,20	0,40	0,30	0,08	0,02

2. Построить полигон относительных частот по данному распределению:

x	4	7	8	12	15
n	15	22	13	30	20

   Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и исправленную выборочную дисперсию.

3. Построить гистограмму статистического распределения данной выборки:

x	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140
n	18	25	36	19	13	6

   Вычислить выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Критерии оценивания решения задач

Решение задачи можно условно разбить на четыре этапа и в соответствии с данными этапами установить ***критерии оценки:***

1. Ознакомиться с условием задачи (анализ условия задачи и его наглядная интерпретация схемой или чертежом) - 0,5 балла.
2. Составить план решения задачи (составление уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление с количественной стороны) - 2 балла;
3. Осуществить решение (совместное решение полученных уравнений относительно той или иной величины, считающейся в данной задаче неизвестной) - 2 балла;
4. Проверка правильности решения задачи (анализ полученного результата и числовой расчет) - 0,5 балла.

Максимальное количество баллов - 5.

Оценка выставляется по количеству набранных баллов.

Содержание